

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2014 – 2015)

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Ngày thi: 24/3/2015

Bài 1: (3 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} = a+b$

Bài 2: (5 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình:

a) $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$

b) $\begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Bài 3: (2 điểm) Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Bài 4: (4 điểm)

a) Cho hai số dương x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{x^2 + 12}{x + y} + y$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$

Bài 5: (4 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại điểm K khác A. Chứng minh rằng:

a) KH đi qua trung điểm M của cạnh BC.

b) BC là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHK và CHK.

Bài 6: (2 điểm)

Theo quyết định Bộ Công Thương ban hành, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ 16/3 sẽ dao động trong khoảng từ 1484 đến 2587 đồng mỗi kWh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng so sánh biểu giá điện trước và sau khi điều chỉnh:

Mức sử dụng trong tháng (kWh)	Giá mới	Giá hiện tại
0 – 50	1484	1388
51 – 100	1533	1433
101 – 200	1786	1660
201 – 300	2242	2082
301 – 400	2503	2324
401 trở lên	2587	2399

- a) Nếu hộ A trung bình mỗi tháng tiêu thụ 120kWh thì theo giá mới số tiền phải trả tăng lên bao nhiêu trong 1 tháng?
- b) Hộ B trong tháng 2 đã trả tiền sử dụng điện là 194170 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ B tiêu thụ trong tháng 2 là bao nhiêu?
- c) Giá sử hộ C trong nửa tháng đầu được tính theo giá cũ, trong nửa tháng sau được tính theo giá mới với mức sử dụng thực tế (bao gồm cả nửa tháng đầu) và lượng điện tiêu thụ ở mỗi nửa tháng là bằng nhau. Số tiền cuối tháng hộ C phải trả là 116350. Hỏi lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là bao nhiêu? Biết rằng lượng điện tiêu thụ không vượt quá 100kWh

❖ ❖ HẾT ❖ ❖

THĂNG TIẾN THĂNG LONG

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2014 – 2015)
MÔN TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 24/3/2015

Hướng dẫn giải

Bài 1: (3 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} = a+b$

Ta có: $a+b+c = \frac{1}{abc} \Rightarrow abc(a+b+c) = 1$

Do đó: $1+b^2c^2 = abc(a+b+c) + b^2c^2 = bc[a(a+b+c) + bc] = bc[a(a+b) + ca + bc]$
 $= bc[a(a+b) + c(a+b)] = bc(a+b)(a+c)$

Tương tự: $1+a^2c^2 = ac(a+b)(b+c); 1+a^2b^2 = ab(a+b)(b+c)$

Do đó:

$$\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} = \sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2(1+a^2b^2)}} = \sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)ac(a+b)(b+c)}{c^2ab(a+b)(b+c)}} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$$

Bài 2: (5 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình:

a) $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$

Điều kiện: $x \geq -3$. Ta có:

$$2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x^2 - x\sqrt{x+3} - 2x\sqrt{x+3} + x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - \sqrt{x+3}) - \sqrt{x+3}(2x - \sqrt{x+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})(x - \sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ x - \sqrt{x+3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x \\ \sqrt{x+3} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 = 4x^2 \\ x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{-3}{4} \\ x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ 1; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$

b) $\begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Điều kiện: $x \geq 1; x \geq -y$.

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x^2 - 2\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = x^2 - 2\sqrt{x-1}(1) \end{cases}$$

Cách 1:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-1)[(x+1)(x^2-1)-9] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-1)(x^3+x^2-x-1-9) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-1)(x^3-2x^2+3x^2-6x+5x-10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-1)(x-2)(x^2+3x+5) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-1)(x-2)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ x=1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=0 \\ x=2; y=2 \end{cases} \end{aligned}$$

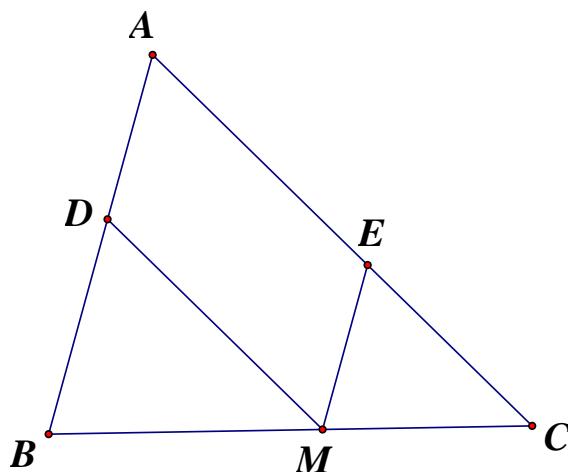
Cách 2:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2+3x+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} (\text{vì } x^2+3x+5 > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} (\text{nhận}) \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} (\text{nhận}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình là $(1;0); (2;2)$

Bài 3: (2 điểm) Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.



Tứ giác MDAE có $MD \parallel AC$, $ME \parallel AB$. Do đó: tứ giác MDAE là hình bình hành
Xét $\triangle DBM$ và $\triangle ABC$ có:

$$\begin{cases} BDM = BAC (\text{đồng vị}, MD \parallel AC) \\ DBM \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle DBM \sim \triangle ABC (g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DBM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BM}{BC} \right)^2 \quad (1). \text{Tương tự: } \frac{S_{EMC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CM}{BC} \right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế theo vế, ta được: $\frac{S_{DBM}}{S_{ABC}} + \frac{S_{EMC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BM}{BC} \right)^2 + \left(\frac{CM}{BC} \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BC} + \frac{CM}{BC} \right)^2 = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \frac{S_{DBM} + S_{EMC}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{S_{ABC} - S_{MDAE}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{S_{MDAE}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{MDAE} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$, không đổi.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{CM}{BC} \Leftrightarrow BM = CM \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC.

Vậy khi M là trung điểm của cạnh BC thì diện tích hình bình hành MDAE lớn nhất và bằng $\frac{1}{2} S_{ABC}$

Bài 4: (4 điểm)

a) Cho hai số dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{x^2 + 12}{x+y} + y$

Cách 1:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 + 12}{x+y} + y = \frac{x^2 + 12 + xy + y^2}{x+y} = \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{3}{4}(x^2 + 2xy + y^2) + 12}{x+y} \\ &= \frac{(x-y)^2}{4(x+y)} + \frac{3}{4}(x+y) + \frac{12}{x+y} \geq 0 + 2\sqrt{\frac{3}{4}(x+y) \cdot \frac{12}{x+y}} = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x-y=0 \\ \frac{3}{4}(x+y) = \frac{12}{x+y} \Leftrightarrow x=y=2 \\ x,y>0 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 6 $\Leftrightarrow x=y=2$

Cách 2:

$$P = \frac{x^2 + 12}{x+y} + y = \frac{x^2 + xy + y^2 + 12}{x+y} \quad (1)$$

Ta có: $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + 4y^2 \geq 3x^2 + 6xy + 3y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$: luôn đúng

$$\text{Do đó: } x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + xy + y^2}{(x+y)} \geq \frac{3}{4}(x+y) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } P \geq \frac{3}{4}(x+y) + \frac{12}{x+y}$$

Áp dụng BĐT Cô -si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{3}{4}(x+y) + \frac{12}{(x+y)} \geq 6 \Leftrightarrow P \geq 6$$

$$\text{Đ dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \frac{3}{4}(x+y) = \frac{12}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$$

Vậy GTNN của P là 6 khi $x=y=2$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$

Cách 1:

$$2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2x + xy + y^2 + y + x + y + 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x(x+y+1) + y(x+y+1) + (x+y+1) = -1 \Leftrightarrow (x+y+1)(2x+y+1) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=1; 2x+y+1=-1 \\ x+y+1=-1; 2x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; x+y+1=-1 \\ x=-2; x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; 3+y=-1 \\ x=-2; -1+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=-4 \\ x=-2; y=2 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên (x;y) cần tìm là: (2;-4);(-2;2)

$$\text{Cách 2: } 2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (3x+12)y + 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = (3x+2)^2 - 4(2x^2 + 3x + 2) = 9x^2 + 12x + 4 - 8x^2 - 12x - 8 = x^2 - 4$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương, nên ta đặt:

$$n^2 - 4 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (n+2)(n-2) = k^2$$

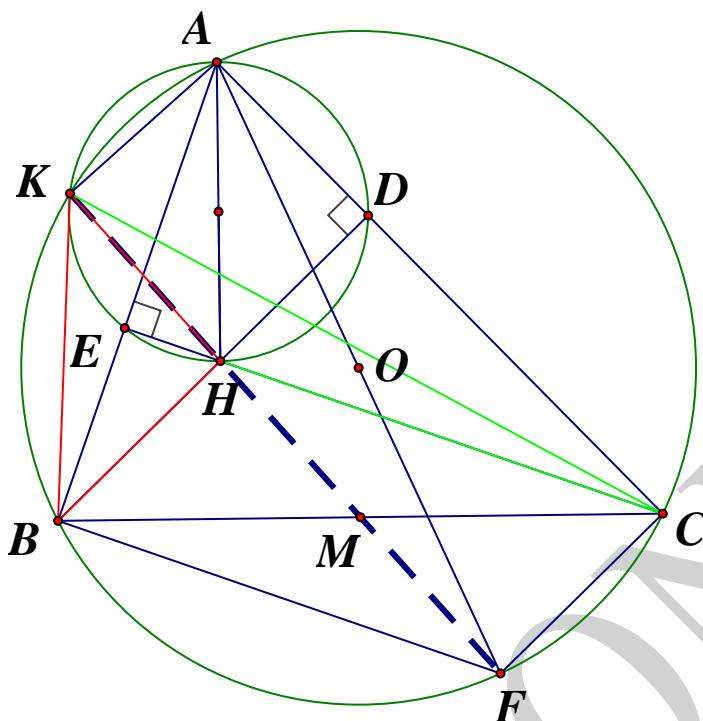
Ta có bảng sau:

$x+k$	1	4	-4	-1	2	-2
$x-k$	4	1	-1	-4	2	-2
x	$\frac{5}{2}$ (loại)	$\frac{5}{2}$ (loại)	$-\frac{5}{2}$ (loại)	$-\frac{5}{2}$ (loại)	2	-2
y					-4	2

Vậy các cặp nghiệm số nguyên (x;y) cần tìm là: (2;-4);(-2;2)

Bài 5: (4 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại điểm K khác A. Chứng minh rằng:



a) KH đi qua trung điểm M của cạnh BC.

Vẽ đường kính AF của đường tròn (O).

Ta có: $\angle ABF = \angle ACF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AF)

Xét tứ giác ADHE, ta có:

$$\angle ADH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

\Rightarrow Tứ giác ADHE nội tiếp (...). Mà $\angle ADH = 90^\circ$. Nên AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE \Rightarrow \angle AKH = 90^\circ$

Ta có: $\angle AKH = \angle AKF (= 90^\circ) \Rightarrow$ Tia KH trung tia KF. $\Rightarrow K, H, F$ thẳng hàng. (1)

Ta có: $\begin{cases} BH \parallel CF (\perp AB) \\ BH \parallel FC (\perp AC) \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác BHCF là hình bình hành (...)

$\Rightarrow HF$ đi qua trung điểm M của BC.

$\Rightarrow H, F, M$ thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) ta có: K, H, F, M thẳng hàng.

Vậy KH đi qua trung điểm M của cạnh BC.

b) BC là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHK và CHK.

Ta có: $\begin{cases} \angle BKF = \angle BCF (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn BF}) \\ \angle HBC = \angle BCF (\text{so le trong và } BH \parallel FC) \end{cases} \Rightarrow \angle BKF = \angle HBC$

\Rightarrow BC là tiếp tuyến của đường tròn (BHK) (3)

Ta có: $\begin{cases} \angle CKF = \angle CBF (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn CF}) \\ \angle HCB = \angle CBF (\text{so le trong và } BF \parallel CH) \end{cases} \Rightarrow \angle CKF = \angle HCB$

\Rightarrow BC là tiếp tuyến của đường tròn (CHK) (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra đpcm.

Bài 6: (2 điểm)

Theo quyết định Bộ Công Thương ban hành, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ 16/3 sẽ dao động trong khoảng từ 1484 đến 2587 đồng mỗi kWh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng so sánh biểu giá điện trước và sau khi điều chỉnh:

Mức sử dụng trong tháng (kWh)	Giá mới	Giá hiện tại
0 – 50	1484	1388
51 – 100	1533	1433
101 – 200	1786	1660
201 – 300	2242	2082
301 – 400	2503	2324
401 trở lên	2587	2399

- a) Nếu hộ A trung bình mỗi tháng tiêu thụ 120kWh thì theo giá mới số tiền phải trả tăng lên bao nhiêu trong 1 tháng?

Hộ A theo giá mới, số tiền phải trả tăng lên trong 1 tháng là:

$$(1484 - 1388).50 + (1533 - 1433).50 + (1786-1660).20 = 12320 \text{ (đồng)}$$

- b) Hộ B trong tháng 2 đã trả tiền sử dụng điện là 194170 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ B tiêu thụ trong tháng 2 là bao nhiêu?

Tháng 2 nên hộ B trả tiền theo giá hiện tại.

Lượng điện mà hộ B tiêu thụ trong tháng 2 là:

$$\left[194170 - (1388.50 + 1433.50) \right] : 1660 + 50 + 50 = 132 \text{ (kWh)}$$

- c) Giả sử hộ C trong nửa tháng đầu được tính theo giá cũ, trong nửa tháng sau được tính theo giá mới với mức sử dụng thực tế (bao gồm cả nửa tháng đầu) và lượng điện tiêu thụ ở mỗi nửa tháng là bằng nhau. Số tiền cuối tháng hộ C phải trả là 116350. Hỏi lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là bao nhiêu? Biết rằng lượng điện tiêu thụ không vượt quá 100kWh.

Gọi lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là $2x$ (kWh) (Điều kiện $0 < x < 50$)

Số tiền nửa tháng đầu hộ C phải trả là: $1388.x$ (đồng)

Số tiền nửa tháng sau hộ C phải trả là: $1484.(50-x) + 1533[x-(50-x)] = 1582x - 2450$ (đồng)

Theo đề bài ta có phương trình:

$$1388x + 1582x - 2450 = 116350$$

$$\Leftrightarrow 2970x = 118800$$

$$\Leftrightarrow x = 40 \text{ (nhận)}$$

Vậy lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là $40.2 = 80$ (kWh)

❖ ❖ HẾT ❖ ❖